Μαθημα 6ο

20/10/2016

Πιθανοτητες

Δεσμευμενη πιθανοτητα

Π.χ

Ζαρι → 1 φορα

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{$αποτελεσμα αρτιος$\} = \{2,4,6\}$

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Υποθετω οτι δεχτηκα μια μερικη πληροφορια(*) σχετική με τα αποτελεσματα του τυχαιου πειραματος

(*) Εστω η πιθανοτητα $B = \{$αποτελεσμα $\geq 4\} = \{4,5,6\}$

Ερωτηση:

Ποια η πιθανοτητα του A μετα τη μερικη πληροφορια B?

Νεα πιθανοτητα του A: $\cancel{\frac{2}{6}}$, $\frac{2}{3}$

Μερικη πληροφορια B:

① μετατρεπει τον αρχικο δειγματικο χωρο S στον B

② τα ευνοϊκα αποτελεσματα για το A ειναι τα $\{4,6\}$

Αρα νεα πιθανοτητα $\frac{2}{3}$, αυτή την πιθανοτητα την λεμε δεσμευμενη πιθανοτητα του A δοθεντος οτι εχει πραγματοποιηθει το B και το συμβολιζω με $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{\text{πληθος ευνοϊκων για το A δοθεντος του B}}{\text{πληθος στοιχειων του B}} =$$

$$= \frac{\|A \cap B\|}{\|B\|} = \frac{\|A \cap B\| / \|S\|}{\|B\| / \|S\|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ορισμος

Εστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χωρος πιθανοτητας και $A, B \in \mathcal{A}$ με $P(B) > 0$
Η δεσμευμενη πιθανοτητα του A δοθεντος του B θα συμβολιζεται με $P(A|B)$ και οριζεται ως εξης:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S \xrightarrow{\text{συντελεται}} B \\ \text{συνολικα } A \xrightarrow{\text{συντελειται}} A \cap B \end{array} \right\}$$

Ερωτηση:

Ειναι η δεσμευμενη πιθανοτητα μετρο πιθανοτητας?
Ικανοποιει τα αξιωματα Kolmogorov?

Προταση

Εστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χωρος πιθανοτητας με P μετρο πιθανοτητας
Εστω για σταθερο $B \in \mathcal{A}$ με $P(B) > 0$, η (νεα) συνολοσυναρτηση $P(\cdot|B) : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ με τυπο

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Νδο η $P(\cdot|B)$ ειναι μετρο πιθανοτητας, ικανοποιει δηλαδη τα αξιωματα Kolmogorov

Παρατηρηση

Αφου η δεσμευμενη πιθανοτητα $P(\cdot|B)$ ειναι μετρο πιθανοτητας ικανοποιει τις ιδιοτητες της αδεσμευτης πιθανοτητας

πχ

$P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$

$P(A \cup B|\Gamma) = P(A|\Gamma) + P(B|\Gamma) - P(A \cap B|\Gamma)$

Παραδειγμα 1:

Ζαρι → 2 φορες

$A = \{$απολυτη τιμη διαφορας οψεων $= 4\}$

$B = \{$το αθροισμα αποτελεσματων ριψεων $= 8\}$

Ποια η $P(A|B)$?

Λυση

Εχουμε οτι:

$A = \{(x,y) : x,y = 1,\dots,6,\ |x-y| = 4\} =$

$= \{(6,2),(2,6),(5,1),(1,5)\}$

$B = \{(x,y) : x,y = 1,\dots,6,\ x+y = 8\} =$

$= \{(4,4),(6,2),(2,6),(5,3),(3,5)\}$

Ισχυει $A \cap B = \{(6,2),(2,6)\}$ οποτε $P(A \cap B) = 2/36$

Συνεπως η δεσμευμενη πιθανοτητα ειναι:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}$$

Παραδειγμα 2:

52 χαρτια τραπουλας → Επιλεγω 5

ⓐ Ποια η πιθανοτητα να εκλεγουν στη πεντοδα ακριβως δυο ασσοι (A), αν ειναι γνωστο οτι εχουν εκλεγει "ακριβως 3 2 ρηγες" (Γ)

ⓑ Ποια η πιθανοτητα να εκλεγουν στη πεντοδα ακριβως δυο ασσοι (A), δοθεντος οτι εχει εκλεγει "τουλαχιστον ενας ασσος" (Γ)

Λυση

⊕ Οι λεξεις κλειδια για να καταλαβω οτι θα χρησιμοποιησω δεσμευμενη πιθανοτητα ειναι: "αν ειναι γνωστο" και "δοθεντος οτι"

ⓐ Δεσμευμενη πιθανοτητα: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (1)

ⓑ Δεσμευμενη πιθανοτητα: $P(A|\Gamma) = \dfrac{P(A \cap \Gamma)}{P(\Gamma)}$ (2)

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{44}{1}}{\binom{52}{5}} = \ldots$$

και

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,0399$$

Συνεπως η σχεση (1) γινεται:

$$P(A|B) = 0,0153$$

$$P(A \cap \Gamma) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = \dots$$

και

$$P(\Gamma) = 1 - P(\Gamma^c) = 1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = \dots$$

Συνεπως η σχεση (2) γινεται:

$$P(A \mid \Gamma) = 0,1170$$

Παρατηρηση

$$\left.\begin{array}{l} P(A \mid B) = 0,0153 \\ P(A) = 0,0399 \end{array}\right\} \quad P(A \mid B) < P(A)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A \mid \Gamma) = 0,1170 \\ P(A) = 0,0399 \end{array}\right\} \quad P(A \mid \Gamma) > P(A)$$

Δηλαδη παρατηρουμε πως δεν υπαρχει κανονας για την συγκριση της δεσμευμενης και της αδεσμευτης πιθανοτητας

Εφαρμογες δεσμευμενης πιθανοτητας

Προταση

Εστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χωρος πιθανοτητας, τοτε ισχυουν

α) Πολλαπλασιαστικος τυπος ή κανονας πιθανοτητων

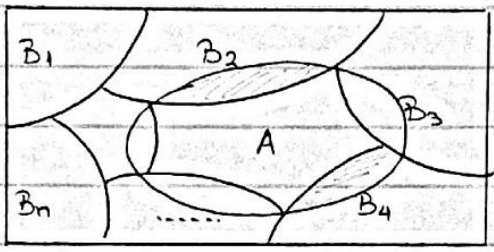
Αν $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots, n$ με $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, $n \geq 2$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

β) Θεώρημα Ολικής πιθανότητας (Θ.Ο.π)

Αν $\{B_1, \dots, B_n\}$ μια διαμέριση του S ($B_i \in S$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = S$) με $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ τότε $\forall A \in \mathcal{A}$ ισχύει

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\,P(B_i)}$$



Απόδειξη

α) β μέλος $= \cancel{P(A_1)} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}}{\cancel{P(A_1)}} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}}{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}} \cdots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)}{\cancel{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}} =$

$= P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$

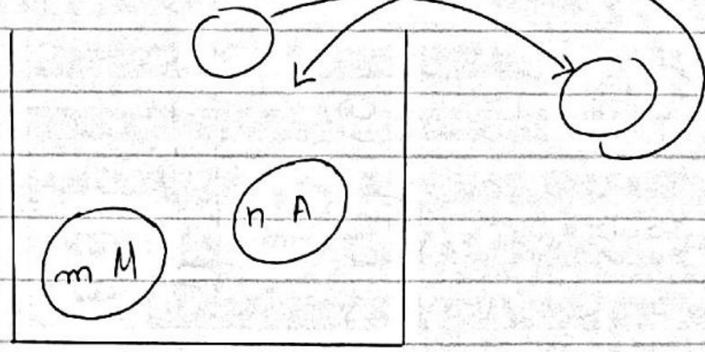
β) $A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$

Επίσης επειδή $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ το ίδιο ισχύει και για $A \cap B_i$ δηλ. $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset$, $i \neq j$

Άρα $P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)\right) \overset{(A_3)}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) \xrightarrow[\text{πιθανότητας}]{\text{ορισμός}}$

$= \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$

Παραδειγμα 3:



μαζί με
κ-μπαλες ιδιου
χρωματος

Μια 2η σφαιρα εκλεγεται
α) Ποια η πιθανοτητα η δευτερη μπαλα να ειναι ασπρη;
β) Ποια η πιθανοτητα και οι δυο σφαιρες ασπρες;
Λυση
α) $A = \{$η 2η μπαλα ασπρη$\}$
$B_1 = \{$η 1η μπαλα ασπρη$\}$
$B_2 = \{$η 1η μπαλα μαυρη$\}$
Απο Θ.Ο.Π : $P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i) =$

$$= P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) =$$

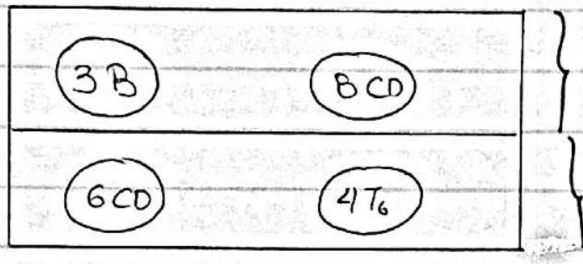
$$= \frac{n+k}{m+n+k} \cdot \frac{n}{m+n} + \frac{n}{m+n+k} \cdot \frac{m}{m+n}$$

$$\binom{n+k}{1} \qquad \binom{m+n+k}{1}$$

β) $P(B_1 \cap A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) = \frac{n+k}{m+n+k} \cdot \frac{n}{m+n}$

$$P(A \mid B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)} = P(A \cap B_1) = P(B_1 \cap A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)$$

παραδειγμα 4:



α) Ποια η πιθανοτητα να διαλεξουμε βιβλιο;

β) Ποια η πιθανοτητα να διαλεξουμε CD;

λυση

α) $P(\text{βιβλιο}) = P(\text{βιβλιο} \mid \Sigma_1) \cdot P(\Sigma_1) + P(\text{βιβλιο} \mid \Sigma_2) \cdot P(\Sigma_2) =$

$= \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{2} + \frac{0}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{22}$

β) $P(CD) = P(CD \mid \Sigma_1) \cdot P(\Sigma_1) + P(CD \mid \Sigma_2) \cdot P(\Sigma_2) =$

$= \frac{8}{11} \cdot \frac{1}{2} + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{22} + \frac{6}{20}$

παραδειγμα προβλημα κλειδιων

Απο n-κλειδια μονο ενα ανοιγει την πορτα

$P(\text{το σωστο κλειδι να χρησιμοποιηθει στην } k\text{-δοκιμη}, k=1,\dots,n) =$

$= P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{k-1}^c \cap A_k)$

$A_i = \{\text{η πορτα ανοιγει στη } i\text{-δοκιμη}\} =$

$= P(A_1^c) \cdot P(A_2^c \mid A_1^c) \cdot P(A_3^c \mid A_1^c \cap A_2^c) \dots P(A_k \mid A_1^c \cap \dots \cap A_{k-1}^c) =$

$= \frac{\cancel{n-1}}{n} \cdot \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \cdot \frac{n-3}{\cancel{n-2}} \dots \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$